

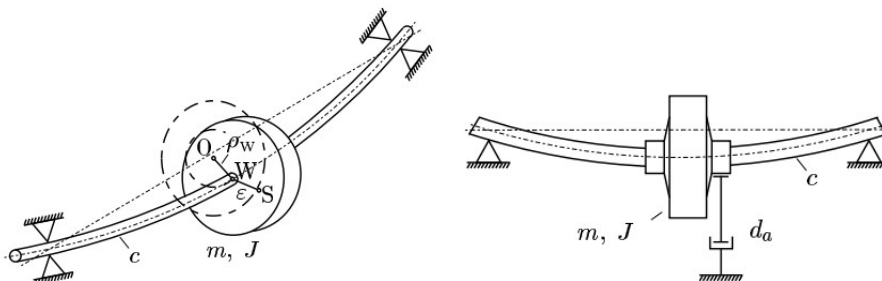
DAO ĐỘNG UỐN CỦA TRỤC LAVAL

1. Mở đầu: Dao động uốn của trục quay là lớp bài toán quan trọng của động lực học máy, có thể gặp trong tính toán các máy công cụ, máy in,... và đặc biệt là trong tính toán thiết kế tuabin để xác định tốc độ quay tới hạn. Đây là tốc độ quay mà máy không được phép hoạt động lâu để đảm bảo an toàn vì tại đó xảy ra hiện tượng cộng hưởng nguy hiểm. Một điểm đặc biệt của lớp bài toán này so với bài toán dao động của dầm hoặc hệ dầm là tần số riêng của hệ ngoài phụ thuộc vào các tham số kết cấu của hệ như khối lượng và độ cứng, còn phụ thuộc vào tốc độ quay của trục. Có thể gọi tần số riêng của trục khi quay là tần số riêng động, để phân biệt với tần số riêng tĩnh khi trục không quay.

Bài toán tính tốc độ quay tới hạn của trục quay có tiết diện thay đổi và có nhiều gối đỡ khá phức tạp. Do vậy, trong một số trường hợp, người ta chỉ tính tần số riêng tĩnh trong dao động uốn của trục không quay (bài toán dao động uốn của dầm và hệ dầm). Sau đó, dựa vào các công thức kinh nghiệm xác định gần đúng tốc độ quay tới hạn của trục quay.

2. DAO ĐỘNG UỐN CỦA TRỤC LAVAL TRÊN GỐI ĐỠ CỨNG

Mô hình dao động uốn của trục quay đơn giản nhất là trục Laval trên gối đỡ cứng khi giả thiết bỏ qua tính đàn hồi của gối đỡ và trục có mặt cắt đối xứng (hình 1). Mô hình gồm một trục đàn hồi (mặt cắt hình tròn, độ cứng uốn c , bỏ qua khối lượng) mang một đĩa tròn cứng (khối lượng m , mômen quán tính khối đối với khối tâm đĩa J_p). Đĩa tròn ở vị trí chính giữa hai gối đỡ và đồng tâm với trục, nghĩa là điểm tâm của trục nằm trên đĩa W trùng với tâm hình học của đĩa. Khoảng cách giữa khối tâm S của đĩa với tâm hình học của đĩa (hoặc tâm trục) gọi là độ lệch tâm ε . Khi trục bị biến dạng, điểm W sẽ lệch khỏi đường nối hai ổ đỡ. Trung điểm của đường nối O đóng vai trò gốc quy chiếu để khảo sát chuyển động của đĩa. Lực cản ngoài, chẳng hạn lực cản nhớt của môi trường xung quanh, được tính tỷ lệ bậc nhất với vận tốc tuyệt đối của điểm W với hệ số cản b .



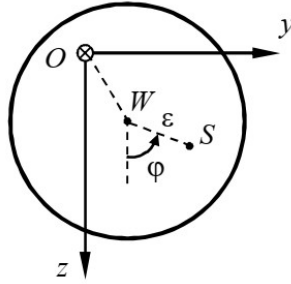
Hình 1 - Trục Laval trên gối cứng với cản ngoài

Đặt vào mặt phẳng của đĩa hệ tọa độ cố định Oyz (Hình 2). Theo định lý chuyển động khối tâm ta có:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_S = -cy_W - b\dot{y}_W \\ m\ddot{z}_S = -cz_W - b\dot{z}_W + mg \end{cases} \quad (1)$$

Giả thiết trục quay ở trạng thái bình ổn (mômen kích động là hằng số và cân bằng với mômen cản), theo định lý biến thiên mômen động lượng ta có:

$$J_p \ddot{\varphi} = (cy_W + b\dot{y}_W) \varepsilon \cos \varphi - (cz_W + b\dot{z}_W - mg) \varepsilon \sin \varphi \quad (2)$$



Hình 2 - Mô hình tính trục Laval trong hệ tọa độ cố định

Thực tế ở các tuabin, độ lệch tâm ε và các tọa độ y_W, z_W thường rất nhỏ so với bán kính quán tính $i_G = \sqrt{J_p/m}$. Khi đó, $\ddot{\varphi} \approx 0$ nên tốc độ quay của trục gần như không đổi $\dot{\varphi} = \Omega = \text{const}$. Ta có

$$\varphi = \Omega t; \quad y_S = y_W + \varepsilon \sin(\Omega t); \quad z_S = z_W + \varepsilon \cos(\Omega t) \quad (3)$$

Thế các phương trình (3) vào (1) nhận được phương trình vi phân chuyển động của trục Laval

$$\begin{cases} m\ddot{y}_W + b\dot{y}_W + cy_W = m\varepsilon\Omega^2 \sin(\Omega t) \\ m\ddot{z}_W + b\dot{z}_W + cz_W = m\varepsilon\Omega^2 \cos(\Omega t) + mg \end{cases} \quad (4)$$

Như vậy, với các giả thiết đã nêu, dao động uốn của trục Laval được xem như một dao động phẳng đơn giản, không có liên hệ giữa dịch chuyển theo hai phương y và z . Nghiệm của các phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng với hệ phương trình (4) có dạng

$$\begin{cases} y_{W,h}(t) = C_y e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \alpha_y) \\ z_{W,h}(t) = C_z e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \alpha_z) \end{cases} \quad (5)$$

trong đó,

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \delta = \frac{b}{2m}. \quad (6)$$

Tần số ω_d không phụ thuộc vào tốc độ quay Ω và bằng tần số riêng của dao động uốn không cản khi $b = 0$.

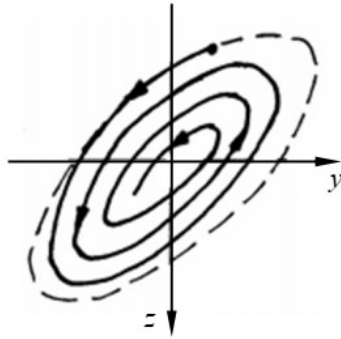
Nghiệm riêng của các phương trình (4) có dạng

$$\begin{cases} y_{W,p}(t) = A \sin(\Omega t - \beta) \\ z_{W,p}(t) = A \cos(\Omega t - \beta) + \frac{mg}{c} \end{cases} \quad (7)$$

trong đó,

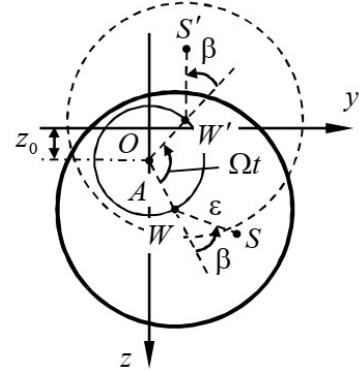
$$A = \varepsilon \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}; \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}; \quad D = \frac{\delta}{\omega_0}; \quad \tan \beta = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}. \quad (8)$$

Theo các phương trình (5), dao động riêng của tâm trục W trong trường hợp tổng quát được mô tả bởi đường xoắn ốc elip đi vào gốc tọa độ (Hình3).



Hình3 - Dao động riêng của tâm trục

Từ các phương trình (7) ta thấy dao động cưỡng bức của trục Laval là các dao động điều hòa với cùng biên độ và lệch pha $\pi/2$, nghĩa là tâm trục W chuyển động trên quỹ đạo tròn bán kính A , tâm ở cách gốc tọa độ một khoảng bằng độ võng tĩnh $z_0 = mg/c$. Chuyển động này có vận tốc góc cùng chiều và bằng tốc độ quay của trục Ω , nên được gọi là chuyển động tiến động đồng bộ. Góc β có giá trị không đổi, xác định vị trí giữa bán kính quỹ đạo của tâm trục với đoạn WS (Hình 4). Có thể thấy rằng



Hình 4

$$\Omega \rightarrow 0: \quad \beta \rightarrow 0, \quad A \rightarrow 0$$

$$\Omega < \omega_0: \quad \beta < \pi/2$$

$$\Omega = \omega_0: \quad \beta = \pi/2, \quad A = A_{\max} \approx \frac{\varepsilon}{2D}$$

$$\Omega > \omega_0: \quad \beta > \pi/2$$

$$\Omega \rightarrow \infty: \quad \beta \rightarrow \pi, \quad A \rightarrow \varepsilon$$

Sự phụ thuộc của góc β vào tốc độ quay của trục có vai trò quan trọng trong việc giải quyết các bài toán động lực học vật quay, chẳng hạn bài toán cân bằng động rôto.

Tại tốc độ quay tới hạn $\Omega = \omega_0$, trục có độ võng và ứng suất uốn là lớn nhất. Khi tốc độ quay của trục rất lớn, $\Omega \rightarrow \infty$, khối tâm của đĩa nằm trên đường nối hai gối đỡ. Độ võng của trục đúng bằng độ lệch tâm ε và có thể nói rằng, khi đó đĩa quay tự định tâm. Đây là chế độ vận hành tối ưu trong phạm vi trên tốc độ tới hạn, vì áp lực động trong ổ trục có giá trị nhỏ nhất.

2. ẢNH HƯỞNG CỦA TRỤC QUAY KHÔNG ĐỀU

Trong mục 0 ta đã giả thiết tốc độ quay của trục là hằng số. Tuy nhiên trong thực tế, vận tốc góc của trục quay ngay cả trong giai đoạn chuyển động bình ổn cũng có thể thay đổi. Giả sử trục quay theo quy luật có dạng

$$\varphi(t) = \Omega t + \psi(t) \quad (9)$$

Khi đó, tọa độ của khối tâm S xác định bởi

$$y_S = y_W + \varepsilon \sin \varphi; \quad z_S = z_W + \varepsilon \cos \varphi. \quad (10)$$

Thay (10) vào các phương trình (1) nhận được

$$\begin{cases} m\ddot{y}_W + b\dot{y}_W + cy_W = m\varepsilon\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - m\varepsilon\ddot{\varphi} \cos \varphi \\ m\ddot{z}_W + b\dot{z}_W + cz_W = m\varepsilon\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + m\varepsilon\ddot{\varphi} \sin \varphi + mg \end{cases} \quad (11)$$

Xét trường hợp đơn giản khi bỏ qua lực cản và trọng lượng của trục, các phương trình (11) có thể biểu diễn dưới dạng biến phức như sau:

$$\ddot{\bar{r}}_W + \omega_0^2 \bar{r}_W = \varepsilon \dot{\varphi}^2 e^{j\varphi} + j\varepsilon \ddot{\varphi} e^{-j\varphi}, \quad (12)$$

trong đó

$$\bar{r}_W = z_W + j y_W; \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m} \quad (13)$$

Giả sử quy luật biến thiên góc quay của trục là

$$\varphi(t) = \Omega t + \frac{\delta}{\gamma} \sin(\gamma \Omega t) \quad (14)$$

Chú ý phép biến đổi lượng giác

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= \exp \left[j\Omega t + j \frac{\delta}{\gamma} \sin(\gamma \Omega t) \right] = e^{j\Omega t} \cdot \exp \left[j \frac{\delta}{\gamma} \sin(\gamma \Omega t) \right] \\ &\approx e^{j\Omega t} \left[1 + j \frac{\delta}{\gamma} \sin(\gamma \Omega t) \right] = e^{j\Omega t} \left[1 + \frac{\delta}{2\gamma} (e^{j\gamma \Omega t} - e^{-j\gamma \Omega t}) \right]; \end{aligned}$$

$$e^{-j\varphi} = \exp \left[-j\Omega t - j \frac{\delta}{\gamma} \sin(\gamma \Omega t) \right] \approx e^{-j\Omega t} \left[1 - j \frac{\delta}{\gamma} \sin(\gamma \Omega t) \right] = e^{-j\Omega t} \left[1 - \frac{\delta}{2\gamma} (e^{j\gamma \Omega t} - e^{-j\gamma \Omega t}) \right],$$

phương trình **Lỗi! Không tìm thấy nguồn tham chiếu.** được đưa về dạng

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{r}}_W + \omega_0^2 \bar{r}_W &= \varepsilon \dot{\varphi}^2 \left[e^{j\Omega t} + \frac{\delta}{2\gamma} e^{j(1+\gamma)\Omega t} - \frac{\delta}{2\gamma} e^{j(1-\gamma)\Omega t} \right] + \\ &\quad - j\varepsilon \ddot{\varphi} \left[e^{-j\Omega t} + \frac{\delta}{2\gamma} e^{-j(1+\gamma)\Omega t} - \frac{\delta}{2\gamma} e^{-j(1-\gamma)\Omega t} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Từ đó, sau một số phép biến đổi có thể thu lại được phương trình đối với biến thực y_W :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_W + \omega_0^2 y_W &= \varepsilon \Omega^2 \cos(\Omega t) + \varepsilon \delta \Omega^2 \left(1 + \frac{1}{2\gamma} + \frac{\delta^2}{8\gamma} + \frac{\gamma}{2} \right) \cos[(1+\gamma)\Omega t] + \\ &\quad + \varepsilon \delta \Omega^2 \left(1 - \frac{1}{2\gamma} - \frac{\delta^2}{8\gamma} - \frac{\gamma}{2} \right) \cos[(1-\gamma)\Omega t] + \frac{1}{2} \varepsilon \delta^2 \Omega^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \cos[(1+2\gamma)\Omega t] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon \delta^2 \Omega^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \cos[(1-2\gamma)\Omega t] + \frac{1}{8\gamma} \varepsilon \delta^3 \Omega^2 \cos[(1+3\gamma)\Omega t] + \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{8\gamma}\varepsilon\delta^3\Omega^2\cos[(1-3\gamma)\Omega t]. \quad (16)$$

Tương tự cũng có thể tìm được phương trình đối với z_w . Từ phương trình (16) ta thấy hiện tượng cộng hưởng sẽ xảy ra khi

$$\omega_0 = \Omega; \quad \omega_0 = (1 \pm \gamma)\Omega; \quad \omega_0 = (1 \pm 2\gamma)\Omega; \quad \omega_0 = (1 \pm 3\gamma)\Omega.$$

Trường hợp $\gamma = 1$ thì hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi

$$\Omega = \omega_0; \quad \Omega = \frac{1}{2}\omega_0; \quad \Omega = \frac{1}{3}\omega_0; \quad \Omega = \frac{1}{4}\omega_0.$$

Khi $\Omega = \frac{1}{k}\omega_0$ với $k = 1, 2, 3, \dots$ thì tốc độ quay tương ứng của trục được gọi là tốc độ quay tới hạn loại k . Trong thực tế, người ta thường phải chú ý đến hai tốc độ quay tới hạn loại một và loại hai.

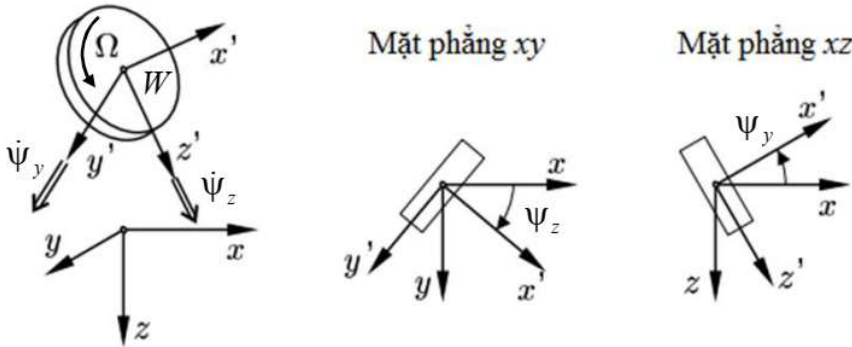
3. ẢNH HƯỞNG CỦA HIỆU ỨNG GYROSCOPE

Trong mô hình trục Laval đã nghiên cứu ở các mục trên, đĩa tròn được bố trí ở vị trí chính giữa theo chiều dài trục và độ cứng của trục đối với hai ổ đỡ đối xứng qua mặt phẳng chứa đĩa. Do cấu hình đối xứng này nên khi trục bị võng, không tồn tại góc xoay của mặt cắt trục tại vị trí mang đĩa. Ngược lại, nếu vị trí của đĩa hay độ cứng của trục không đối xứng đối với hai ổ đỡ, hoặc đĩa được lắp bên ngoài hai ổ đỡ (ví dụ trục quay của máy tiện) thì dịch chuyển hướng tâm của điểm tâm đĩa W dẫn đến góc nghiêng của đĩa. Trong trường hợp này ta phải quan tâm đến tác dụng của mômen gyroscope (con quay hồi chuyển). Tùy thuộc vào kích thước của đĩa quay, ảnh hưởng của hiệu ứng gyroscope (hiệu ứng con quay) có thể có tác dụng làm ổn định hoặc gây mất ổn định.

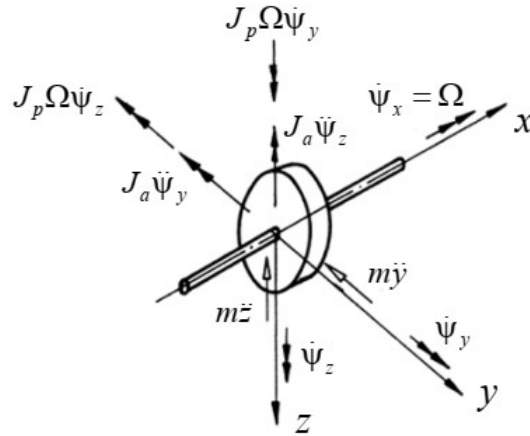
Để thiết lập các phương trình chuyển động, giả sử đĩa tròn đồng chất ($W \equiv S$) quay cùng trục có tốc độ quay không đổi $\Omega = \text{const.}$, bị uốn theo các hướng y và z với các góc xoay nhỏ (chiều quay dương theo quy tắc bàn tay phải hay quy tắc đinh ốc) tương ứng ψ_y và ψ_z . Giải phóng đĩa tròn thành vật rắn tự do (Hình 5 và Hình 6), gắn vào tâm đĩa hệ trục tọa độ động $(R) \equiv (xyz)'$ có trục x' trùng với trục quay riêng của đĩa và các trục y', z' cố định với mặt phẳng của đĩa nhưng không quay quanh trục x' . Theo biến dạng uốn của trục, x' tạo với mặt phẳng xy và xz các góc tương ứng ψ_y và ψ_z .

Vì đĩa tròn đối xứng với trục quay x' nên mặc dù hệ tọa độ động không gắn chặt với đĩa, các đặc trưng quán tính của đĩa đối với hệ này vẫn không đổi trong quá trình chuyển động. Các mômen quán tính khối của đĩa đối với hệ trục quán tính chính (R) là $J_x = J_p$ và $J_y = J_z = J_a$. Đối với các đĩa tròn mỏng đồng chất ta có:

$$J_p = \frac{1}{2}mR^2 ; \quad J_a = \frac{1}{4}mR^2. \quad (17)$$



Hình 5 - Hệ tọa độ khi giải phóng đĩa tròn tự do



Hình 6 - Các lực và mômen tác dụng trên đĩa tròn tự do

Áp dụng định lý chuyển động khối tâm thu được phương trình chuyển động đối với các tọa độ tâm đĩa:

$$m\ddot{y} = F_y \quad \text{và} \quad m\ddot{z} = F_z \quad (18)$$

Để thu được biểu thức xác định mômen do trục tác dụng lên đĩa, sử dụng định lý mômen động lượng đối với tâm đĩa. Các thành phần tọa độ của vectơ mômen động lượng của đĩa $\vec{L}_W$ trong hệ tọa độ động:

$$L_{x'} = J_p\Omega ; \quad L_{y'} = J_a\dot{\psi}_y ; \quad L_{z'} = J_a\dot{\psi}_z. \quad (19)$$

Do đó, các thành phần tọa độ của vectơ mômen động lượng của đĩa trong hệ quy chiếu cố định là:

$$\begin{cases} L_y = L_{x'} \sin \psi_z + L_{y'} \cos \psi_z, \\ L_z = -L_{x'} \sin \psi_y + L_{z'} \cos \psi_y. \end{cases} \quad (20)$$

Đối với các góc quay ψ nhỏ, $\sin \psi \approx \psi$, $\cos \psi \approx 1$ dẫn đến

$$\begin{cases} L_y \approx L_{y'} + L_{x'} \psi_z, \\ L_z \approx L_{z'} - L_{x'} \psi_y. \end{cases} \quad (21)$$

Thay các biểu thức (19) vào (21) thu được

$$\begin{cases} L_y \approx J_a \dot{\psi}_y + J_p \Omega \psi_z, \\ L_z \approx J_a \dot{\psi}_z - J_p \Omega \psi_y. \end{cases} \quad (22)$$

Áp dụng định lý mômen động lượng, các thành phần mômen đối với các trục tọa độ cố định Oy và Oz , tác dụng lên đĩa do biến dạng uốn của trục có thể biểu diễn dưới dạng

$$\begin{cases} M_y = \frac{d}{dt}(L_y) = J_a \ddot{\psi}_y + J_p \Omega \dot{\psi}_z \\ M_z = \frac{d}{dt}(L_z) = J_a \ddot{\psi}_z - J_p \Omega \dot{\psi}_y \end{cases} \quad (23)$$

hoặc viết trong dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_a & 0 \\ 0 & J_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi}_y \\ \ddot{\psi}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & J_p \Omega \\ -J_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_y \\ \dot{\psi}_z \end{bmatrix} \quad (24)$$

Suy ra phương trình chuyển động của đĩa là

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_a & 0 \\ 0 & J_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi}_y \\ \ddot{\psi}_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & J_p \Omega \\ -J_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_y \\ \dot{\psi}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Trong vế trái của phương trình (25), số hạng đầu tiên ứng với mômen ngoại lực, số hạng thứ hai ứng với mômen quán tính và số hạng cuối cùng là mômen gyroscope tác dụng lên đĩa. Thành phần mômen gyroscope khiến các phương trình ứng với tọa độ góc khác nhau không độc lập. Mômen đối với trục Oy tỷ lệ với vận tốc góc $\dot{\psi}_z$ quay quanh trục Oz và ngược lại. Hình 6 cho thấy, mômen M_y gây ra góc xoay ψ_y , dẫn đến mômen gyroscope $J_p \vec{\Omega} \times (\dot{\psi}_y \vec{j}')$ dọc theo trục Oz , có chiều theo xu hướng xoay trục quay của đĩa về phía trục Oy . Ngược lại, mômen M_z gây ra góc xoay ψ_z , dẫn đến mômen gyroscope $J_p \vec{\Omega} \times (\dot{\psi}_z \vec{k}')$ dọc theo trục Oy , có chiều theo xu hướng xoay trục quay của đĩa về phía trục Oz . Đối với

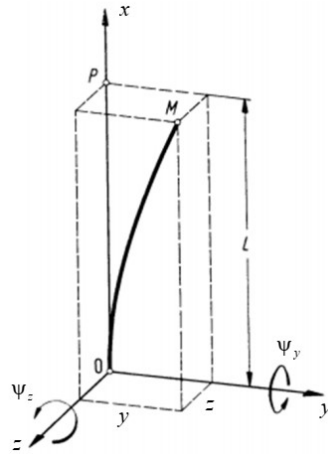
các vật quay dài, $J_a \gg J_p$, khi tính toán dao động uốn của trục có thể bỏ qua ảnh hưởng của mômen gyroscope (ví dụ trục máy dệt).

Để đơn giản ta bỏ qua trọng lượng và lực cản, chỉ xét các lực đàn hồi tác dụng lên đĩa. Giả thiết đối với trường hợp biến dạng nhỏ, mối quan hệ giữa các thành phần lực (F_y, F_z, M_y, M_z) và các thành phần biến dạng (y, z, ψ_y, ψ_z) là tuyến tính. Trong Hình 7, trục khi chưa biến dạng nằm dọc theo trục x , tâm đĩa có vị trí tại điểm P . Khi trục bị biến dạng uốn, tâm đĩa dịch chuyển đến vị trí điểm M . Tọa độ của điểm M là (y, z) và góc xoay (ψ_y, ψ_z) xác định bởi tiếp tuyến của đường tâm trục tại M . Tại điểm M trên đĩa có các lực đàn hồi (F_y, F_z) tác dụng và các mômen đàn hồi (M_y, M_z) tác dụng lên đĩa:

$$\begin{cases} F_y = -(c_{11}y + c_{14}\psi_z); & F_z = -(c_{22}z + c_{23}\psi_y); \\ M_y = -(c_{32}z + c_{33}\psi_y); & M_z = -(c_{41}y + c_{44}\psi_z). \end{cases} \quad (26)$$

trong đó, c_{ij} là các hằng số đàn hồi. Trường hợp trục đồng nhất đẳng hướng và ổ đỡ cứng hoặc ổ đỡ đàn hồi đẳng hướng, ta có:

$$c_{11} = c_{22}; \quad c_{14} = c_{41} = -c_{23} = -c_{32}; \quad c_{33} = c_{44}. \quad (27)$$



Hình 7 - Mô hình biến dạng nhỏ của trục

Thế các phương trình (26) vào các phương trình (18) và (25) ta có hệ phương trình dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (28)$$

trong đó, $\mathbf{q} = [y \quad z \quad \psi_y \quad \psi_z]^T$ và

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_a \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p \Omega \\ 0 & 0 & -J_p \Omega & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{14} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & 0 \\ 0 & c_{32} & c_{33} & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Để giải quyết bài toán dao động riêng của trục, ta tìm nghiệm của phương trình (28) dưới dạng

$$\mathbf{q} = \mathbf{v}e^{\lambda t} \quad (30)$$

Thế nghiệm (30) vào phương trình (28) thu được

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (31)$$

Để phương trình đại số tuyến tính thuần nhất (31) có nghiệm không tầm thường, cần có

$$\det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}) = 0 \quad (32)$$

Khai triển phương trình đặc trưng (32) nhận được

$$\lambda^8 + a_6\lambda^6 + a_4\lambda^4 + a_2\lambda^2 + a_0 = 0 \quad (33)$$

trong đó,

$$\begin{aligned} a_6 &= \frac{c_{11} + c_{22}}{m} + \frac{c_{33} + c_{44}}{J_a} + \left(\frac{J_p \Omega}{J_a} \right)^2; \\ a_4 &= \frac{c_{11}c_{22}}{m^2} + \frac{c_{33}c_{44}}{J_a^2} + \frac{c_{22}c_{33} - c_{23}^2 + c_{11}c_{44} + c_{22}c_{44} + c_{11}c_{33} - c_{14}^2}{mJ_a} + \frac{c_{11} + c_{22}}{m} \left(\frac{J_p \Omega}{J_a} \right)^2; \\ a_2 &= \frac{c_{11}(c_{22}c_{33} - c_{23}^2) + c_{22}(c_{11}c_{44} - c_{14}^2)}{m^2 J_a} + \\ &\quad + \frac{c_{44}(c_{22}c_{33} - c_{23}^2) + c_{33}(c_{11}c_{44} - c_{14}^2)}{mJ_a^2} + \left(\frac{J_p \Omega}{J_a} \right)^2 \frac{c_{11}c_{22}}{m^2}; \\ a_0 &= \frac{(c_{22}c_{33} - c_{23}^2)(c_{11}c_{44} - c_{14}^2)}{m^2 J_a^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Phương trình đại số (33) chỉ chứa lũy thừa bậc chẵn của λ nên có bốn cặp nghiệm phức liên hợp

$$\lambda_i = j\omega_i; \quad \lambda_i^* = -j\omega_i \quad (i = \overline{1,4}) \quad (35)$$

Thay các giá trị tìm được của λ_i hoặc λ_i^* vào phương trình (31) nhận được phương trình xác định các vectơ riêng

$$(\mathbf{C} - \omega_i^2 \mathbf{M} \pm j\omega_i \mathbf{B}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad (36)$$

Giải phương trình (36) thu được bốn cặp vectơ riêng phức liên hợp

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i + j\mathbf{s}_i; \quad \mathbf{v}_i^* = \mathbf{r}_i - j\mathbf{s}_i \quad (i = \overline{1,4}) \quad (37)$$

Từ đó ta có biểu thức nghiệm riêng của phương trình (28)

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i \sin(\omega_i t + \gamma_i) + \mathbf{s}_i \cos(\omega_i t + \gamma_i) \quad (i = \overline{1,4}) \quad (38)$$

Nghiem tổng quát của phương trình (28) là

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^4 C_i [\mathbf{r}_i \sin(\omega_i t + \gamma_i) + \mathbf{s}_i \cos(\omega_i t + \gamma_i)] \quad (39)$$

với các hằng số C_i, γ_i xác định từ các điều kiện đầu.

Cần lưu ý rằng, trong phương trình (28) có các thành phần mômen gyroscope, do đó các tần số riêng ω_i , cũng như các phần thực và phần ảo của các vectơ riêng $\mathbf{v}_i$ phụ thuộc tốc độ quay Ω của trục.

Xét trường hợp đơn giản đối với trục quay đẳng hướng trên ổ đỡ đẳng hướng thỏa mãn các biểu thức (27), phương trình (28) có thể biểu diễn dưới dạng vô hướng:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + k_{11}y + k_{12}\psi_z = 0 \\ m\ddot{z} + k_{11}z - k_{12}\psi_y = 0 \\ J_a\ddot{\psi}_y + J_p\Omega\dot{\psi}_z - k_{12}z + k_{22}\psi_y = 0 \\ J_a\ddot{\psi}_z - J_p\Omega\dot{\psi}_y + k_{12}y + k_{22}\psi_z = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Các phương trình (40) có thể biểu diễn dưới dạng ma trận sử dụng biến phức như sau

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{r}} \\ \ddot{\bar{\psi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -jJ_p\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{r}} \\ \dot{\bar{\psi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & -jk_{12} \\ jk_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r} \\ \bar{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

trong đó, các biến phức xác định bởi biểu thức

$$\bar{r} = y + jz \quad \text{và} \quad \bar{\psi} = \psi_y + j\psi_z. \quad (42)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (41) dưới dạng

$$\bar{r} = \hat{r} e^{j\omega t} \quad \text{và} \quad \bar{\psi} = \hat{\psi} e^{j\omega t}. \quad (43)$$

Thay vào phương trình (41) thu được hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất đối với các biên độ $\hat{r}$ và $\hat{\psi}$:

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m\omega^2 & -j k_{12} \\ j k_{12} & k_{22} - J_a \omega^2 + J_p \Omega \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Để phương trình (44) có nghiệm không tầm thường cần thỏa mãn phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m\omega^2 & -j k_{12} \\ j k_{12} & k_{22} - J_a \omega^2 + J_p \Omega \omega \end{vmatrix} = 0 \quad (45)$$

$$\Rightarrow (mJ_a)\omega^4 - (mJ_p\Omega)\omega^3 - (mk_{22} + J_a k_{11})\omega^2 + (J_p k_{11}\Omega)\omega + (k_{11}k_{22} - k_{12}^2) = 0. \quad (46)$$

Phương trình (46) có bốn nghiệm thực tương ứng với các tần số riêng phụ thuộc tốc độ quay Ω của trục là $\omega_i = \omega_i(\Omega)$, với $i = \overline{1, 4}$ và được biểu diễn trong biểu đồ Campbell (**Lỗi! Không tìm thấy nguồn tham chiếu.**). Dễ thấy, đồ thị của các hàm số $\omega_i = \omega_i(\Omega)$ đối xứng tâm qua gốc tọa độ. Trường hợp đặc biệt khi thay thế đĩa tròn bởi một chất điểm ($J_a = J_p = 0$), ta có tần số riêng của trục mang khối lượng là $\omega = \sqrt{(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)/(mk_{22})}$. Nếu $\Omega = 0$, ta thu được tần số riêng ω_{10} và ω_{20} của trục không quay.

Dựa vào chiều tốc độ quay của trục Ω và của tâm trục ω trên quỹ đạo, người ta phân biệt hai chế độ chuyển động: chế độ quay tiến động thuận khi Ω và ω cùng chiều; chế độ quay tiến động nghịch khi Ω và ω ngược chiều. Một trường hợp đặc biệt của chế độ quay tiến động thuận là quay thuận đồng bộ, khi tốc độ quay Ω của trục và vận tốc góc ω của tâm trục bằng nhau ($\Omega = \omega$), dao động uốn được kích động nhờ sự mất cân bằng.

4. Kết luận

Báo cáo trình bày về dao động uốn của trục Lavval, là một bài toán quan trọng trong tính toán thiết kế tuabin để xác định tốc độ quay tới hạn. Đây là tốc độ quay mà máy không được phép hoạt động lâu để đảm bảo an toàn vì tại đó xảy ra hiện tượng cộng hưởng nguy hiểm. Một điểm đặc biệt của lớp bài toán này so với bài toán dao động của dầm hoặc hệ dầm là tần số riêng của hệ ngoài phụ thuộc vào các tham số kết cấu của hệ như khối lượng và độ cứng, còn phụ thuộc vào tốc độ quay của trục. Có thể gọi tần số riêng của trục khi quay là tần số riêng động, để phân biệt với tần số riêng tĩnh khi trục không quay.